Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II Unificado - MAC128
Data: 16/02/2016

Segunda Prova

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y^5)^6 x^4}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pode-se afirmar:

(a) A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$
(b) A função f é contínua somente na origem
(c) A função f é contínua somente em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
(d) A função f não é contínua sobre os pontos da parábola $y = -x^2$
(e) Não sei.

2. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 y}{x^8+y^4} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Considere as afirmações :

I. O limite de f quando $(x,y) \to (0,0)$ por pontos da reta $y = x$ é zero.
II. O limite de f quando $(x,y) \to (0,0)$ por pontos da parábola $x = y^2$ é zero.
III. O limite de f quando $(x,y) \to (0,0)$ por pontos da parábola $y = x^2$ é zero.
IV. A função f não é contínua apenas em $(0,0)$.
V. A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas as afirmativas **III** e **V** são falsas
(b) Apenas a afirmativa **IV** é falsa
(c) Apenas as afirmativas **I** e **V** são verdadeiras
(d) Apenas as afirmativas **I**, **III** e **V** são verdadeiras
(e) Não sei.

3. Seja $f(x,y) = 4e^x \ln y$, $x(u,v) = \ln(u\cos(v))$ e $y(u,v) = u\sin(v)$. Se $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, então as derivadas parciais de F em $(2, \pi/4)$ são:

(a) $F_u(2,\pi/4) = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$ e $F_v(2,\pi/4) = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$
(b) $F_u(2,\pi/4) = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$ e $F_v(2,\pi/4) = -\sqrt{2}(\ln 2 - 4)$
(c) $F_u(2,\pi/4) = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$ e $F_v(2,\pi/4) = 2\sqrt{2}(\ln 2 + 2)$
(d) $F_u(2,\pi/4) = \sqrt{2}\ln 2 + 2$ e $F_v(2,\pi/4) = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$
(e) Não sei.

4. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável tal que $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 2$, $f_x(1,1) = -1$, $f_y(0,0) = 3$ e $f_y(1,1) = 4$. Se $g(x,y) = f(f(x,y), f(x,y))$, os valores das derivadas parciais $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$ são respectivamente:

(a) 6 e 9
(b) 13 e 10
(c) -5 e 2
(d) 6 e 2
(e) Não sei.

5. Considere a função $f(x,y) = x^2\sin(\pi xy)$. Para que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(1, \frac{1}{2})$ seja máxima, o ângulo que o vetor $\mathbf{u}$ deve formar com o eixo x (medido a partir do eixo x no sentido anti-horário) é:

(a) 0^o
(b) 30^o
(c) 45^o
(d) 90^o
(e) Não sei.

6. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto $(1,2)$. Sabe-se que $f_x(1,2) = -1$ e que a derivada direcional de f no ponto $(1,2)$ na direção e sentido de $\mathbf{u} = (1,1)$ vale 1. Quanto vale $f_y(1,2)$?

(a) $1 + \sqrt{2}$
(b) 2
(c) 0
(d) $\sqrt{2}$
(e) Não sei.

7. A equação do plano que contém as 2 retas parametrizadas por $\mathbf{r}_1(t) = (1+t, t, -1+t)$, $\mathbf{r}_2(t) = (1-t, 2t, -1+t)$ $(t \in \mathbb{R})$ é:

(a) $-x - 2y + 3z = -4$
(b) $x + y + z = 0$
(c) $-x + 2y + z = 0$
(d) $x + y - z = 2$
(e) Não sei.

8. O plano tangente à superfície $x^4 + y^2 + 2z^2 = 4$ no ponto $(1,1,1)$ intersepta o eixo dos x quando:

(a) $x = \frac{5}{2}$
(b) $x = 1$
(c) $x = \frac{1}{4}$
(d) $x = \sqrt{2}$
(e) Não sei.

9. Considere a superfície S dada pela equação $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$. Qual curva abaixo é tangente a S no ponto $(0,1,2)$?

(a) $\sigma(t) = (te^t, 1 - te^t, 2)$ em $t = 0$
(b) $\sigma(t) = (te^t, 1 - te^t, 0)$ em $t = 0$
(c) $\sigma(t) = (te^t, 1 + te^{-t}, 2)$ em $t = 0$
(d) $\sigma(t) = (te^t, 1 + te^t, 2)$ em $t = 0$
(e) Não sei.

Nome: ____

10. No ponto P a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem plano tangente ortogonal ao plano $y = 1$. Assinale a alternativa correta:
    (a) $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
    (b) $P = (0, 1, 0)$
    (c) $P = (0, -1, 0)$
    (d) $P = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
    (e) Não sei.

11. Seja $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?
    (a) f possui somente um ponto crítico e tal ponto crítico é um ponto de sela
    (b) f possui somente um ponto crítico e tal ponto crítico é um ponto de máximo local
    (c) f possui somente um ponto crítico e tal ponto crítico é um ponto de mínimo local
    (d) f possui dois pontos críticos, sendo um de máximo local e outro de sela
    (e) Não sei.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de segunda ordem contínuas tal que $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 2$ e $f_{yy}(1, 1) = 4$. Para qual das afirmativas abaixo, o ponto $(1, 1)$ será um ponto de sela de f?
    (a) $f_{xy}(1, 1) > \sqrt{8}$
    (b) $1 \leq f_{xy}(1, 1) < \sqrt{8}$
    (c) $0 < f_{xy}(1, 1) < 1$
    (d) $f_{xy}(1, 1) = 0$
    (e) Não sei.

13. Sejam a, b e c três números positivos arbitrários tais que a soma vale 12. O menor valor possível de
    $a^2 + b^2 + \dfrac{c^2}{4}$ é
    (a) 24
    (b) 48
    (c) 72
    (d) 16
    (e) Não sei.

14. Seja $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$ definida na região triangular fechada D com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?
    (a) O máximo absoluto de f em D é 9 e o mínimo absoluto de f em D é -14
    (b) O máximo absoluto de f em D é 11 e o mínimo absoluto de f em D é -14
    (c) O máximo absoluto de f em D é 9 e o mínimo absoluto de f em D é -17
    (d) O máximo absoluto de f em D é 4 e o mínimo absoluto de f em D é -17
    (e) Não sei.

15. Seja $f(x, y) = 4x + 6y$ e $\mathcal{C}$ a circunferência $x^2 + y^2 = 13$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?
    (a) O máximo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é 26 e o mínimo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é -26
    (b) Os valores extremos de f em $\mathcal{C}$ ocorrem em $(\pm 2, 3)$
    (c) Os valores extremos de f em $\mathcal{C}$ ocorrem em $(2, -3)$, $(-2, 3)$
    (d) O máximo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é 20 e o mínimo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é -20
    (e) Não sei.